1. Почему станция крутится и не падает?

Если быть точным, то на самом деле падает, просто очень медленно и связано это с трением об атмосферу, которое на такой высоте, мягко скажем, не значительное, поэтому далее трением об атмосферу будем пренебрегать, и будем считать, что станция не падает.

Для работы будет удобнее выбрать полярную систему координат с началом координат в центре земли. Соответственно обозначим расстояние до центра земли и угол как r и φ. Так же далее будем считать, что расстояние и угол зависят от времени и аргумент в скобках писать не будем: $r(t) \to r$, $\varphi(t) \to \varphi$. Точкой сверху и двумя точками сверху будут обозначены соответственно первая и вторая производная по времени: $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$, $\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} = \ddot{\varphi}$.

Чтобы построить уравнения движения нужно выразить кнетическую и потенциальную энергии. Для того, чтобы выразить кинетическую энергию нужно вычислить квадрат модуля скорости. В декартовых координатах он принимает вид: $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Чтобы перейти к полярным координатам нужно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases} \tag{1}$$

Подставляя (1) в выражение для модуля скорости получим:

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Отсюда кинетическая энергия примет вид:

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \tag{2}$$

где m - масса станции.

Потенциальная энергия в поле гравитации (по Ньютону) будет равна:

$$U = -GMm\frac{1}{r} \tag{3}$$

где G - гравитационная постоянная, M - масса земли, а m, как уже говорилось - масса станции.

Исходя из (2) и (3) получим лагранжиан:

$$L = T - U = m\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + GM\frac{1}{r}\right)$$

Уравнения движения будут являться уравнениями Эйлера-Лагранжа, о них можно почитать в вики, здесь же я напомню их вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{4}$$

где q - обобщённая координата. В нашем случае обобщённых координат две: r и φ, поэтому движение станции будет описываться двумя уравнениями (их вывод из (4) не сложен и я его приводить не буду):

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}r = 2\dot{\varphi}\dot{r} \\ \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - GM\frac{1}{r^2} \end{cases} \tag{5}$$

Можно заметить, что в уравнения движения не входит m, это означает, что траектория движения станции не зависит от её массы. На Рис. 1, 2, 3, 4, 5 изображены решения системы (5) при $G = M = 1$, $r_0 = r(0) = 1$, $\varphi_0 = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{r}_0 = 0$ и разных $\dot{\varphi}_0$.

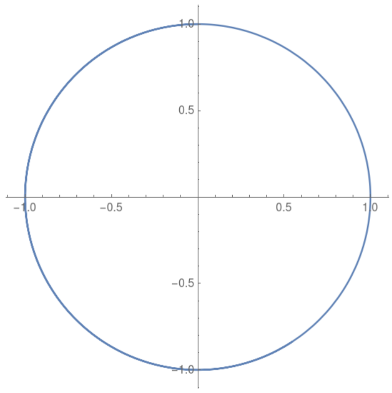

Рис. 1. Траектория полёта станции при $\dot{\varphi}_0 = 1$.

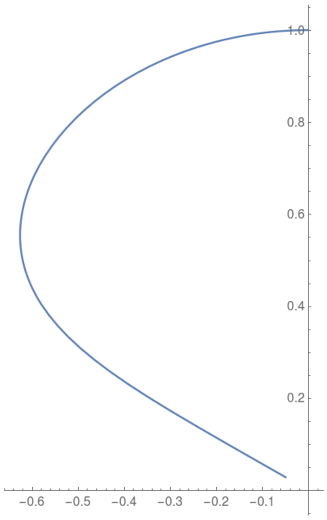

Рис. 2. Траектория полёта станции при $\dot{\varphi}_0 = 0.9$.

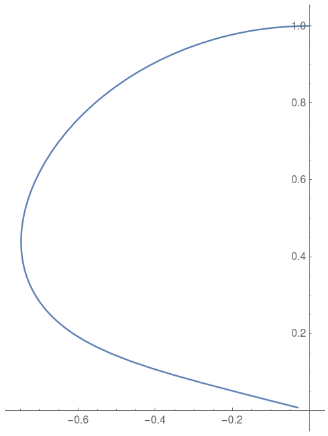

Рис. 3. Траектория полёта станции при $\dot{\varphi}_0 = 0.95$.

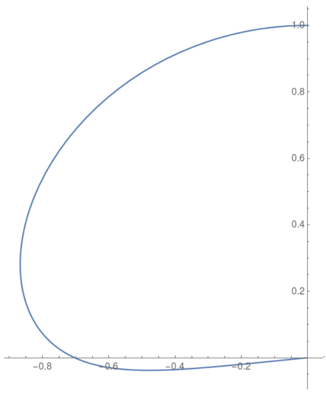

Рис. 4. Траектория полёта станции при $\dot{\varphi}_0 = 0.98$.

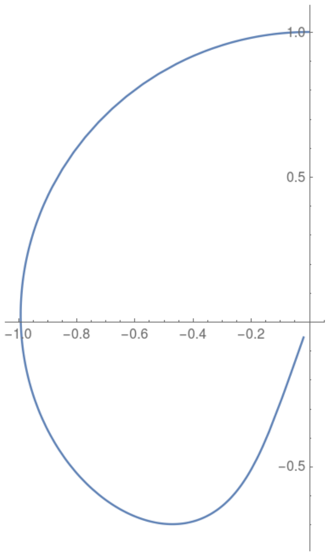

Рис. 5. Траектория полёта станции при $\dot{\varphi}_0 = 0.999$.

Как видно из Рис. 1, при определённых условиях траектория движения станции представляет собой окружность. На остальных рисунках представлено падение станции при разных начальных скоростях.

Нужно отметить, что траектория движения объекта А в поле гравитации объекта В не зависит от массы А до тех пор, пока можно принебрегать силой, действующей на объект В со стороны А. В противном случае получится задача 2-х тел, и их траектории будут зависеть от обеих масс.

2. Почему невесомость?

В предыдущем пункте мы выяснили, что траектория движения "лёгкого" тела в поле силы тяжести не зависит от его массы, отсюда следует, что ускорение станции равно ускорению находящихся в ней людей. По этому относительно станции люди движутся без ускорения, и по этому возникает невесомость.

3. Пара слов о ТО.

Согласно ТО гравитация представляет собой искривление пространства-времени, а тела летящие в поле гравитации - двигаются по геодезическим линиям. В плоском пространстве (не искривлённом) геодезические линии представляют собой прямые т.к. в нём отсутствует гравитация. Инерциальная система отсчёта по сути представляет собой систему координат в плоском пространстве-времени со следующей метрикой:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \sum_{k=1}^{3}\sum_{p=1}^{3} g_{kp}(x^1, x^2, x^3)dx^k dx^p \tag{6}$$

Где x^1, x^2, x^3 - пространственные координаты, в общем случае криволинейные, g_{kp} - метрический тензор пространственной части метрики, который можно привести к символу Кронекера. Такую метрику можно ввести только в плоском пространстве, соответственно инерциальной может быть система отсчёта только в плоском пространстве (тут везде я ставлю знак равенства между системой координат и системой отсчёта).

Пространство-время в ОТО представляет собой гладкую 4-х мерную поверхность (многообразие - по умному), а к такой поверхности в каждой точке можно провести касательную плоскость (4-х мерное плоское пространство), и в близи этой точки касания касательное пространство будет очень близко к исходной поверхности. Поэтому для описания движения вблизи точки касания можно пользоваться касательным пространством, а в нём можно ввести метрику вида (6). В таком случае говорят о локально инерциальной системе отсчёта, она плоская и в ней не видно гравитации (приблизительно). Т.о. можно ввести локально инерциальную систему отсчёта, связанную со станцией, и т.к. космонавты находятся к ней близко, то для описания их движения можно пользоваться плоским касательным пространством, а т.к. кроме гравитации на космонавтов и станцию ничего не действует, то будет невесомость. Для описания орбитального движения в ТО удобно воспользоваться метрикой Шварцшильда, об этом можно прочесть здесь и здесь.